

Havo 4, Handig tellen en Kansrekenen.

Getal en ruimte boek 1, hoofdstuk 1. Handig tellen.

Paragraaf 1, de vermenigvuldig regel: Als je EN hoort, doe je *

en de plusregel: Als je OF hoort, doe je +

1a. Er zijn 6 mogelijkheden, $2 * 3 = 6$

b. Voordeel wegendiagram : overzichtelijker, minder werk om te maken, goed voor gelijkmatige situaties.

Voordeel boomdiagram : je kan er makkelijk ongelijkmatige situaties mee uitbeelden

2

6				10	11	12
5	6				10	11
4		6				10
3			6			
2				6		
1					6	
+	1	2	3	4	5	6

b. minstens 10, dus 10,11 of 12 dat zijn 6 mogelijkheden

c. dat zijn 5 mogelijkheden

d. oneerlijk, kansen zijn $\frac{6}{36}$ en $\frac{5}{36}$

e. het rooster is handiger

3a. Wegen, dat is het makkelijkst in deze gelijkmatige situatie

b. $5 * 3 = 15$

c. $7 * 4 = 28$, toename met 13 mogelijkheden

4

	A	B	C	D	E
A	-				
B		-			
C			-		
D				-	
E					-

a. Ieder speelt een keer tegen elkaar

b. rooster is hier het overzichtelijkst

c. 10, zie rooster

5. $3 * 2 * 1 = 6$

6

4	5					10
3		5				
2			5			
1				5		
+	1	2	3	4	5	6

a. rooster is hier het overzichtelijkst

b. 4, zie rooster

c. 6, zie rooster

7a. Rooster kan hier niet, ivm 3 dobbelstenen 556, 565, 655

b. 556, 565, 655, 566, 656, 665, 666 (meer dan 15, dus 16, 17 of 18). 7 mogelijkheden

c. $15 = 555, 456, 465, 546, 564, 645, 654$ dus 7 mogelijkheden

8a. $5 = 113, 131, 311, 122, 212, 221$ dus 6 mogelijkheden

- b. 6 of minder: 111, 112 (3*), 113 (3*), 114 (3*), 123 (6*), 122 (3*),
totaal 19 mog.

9. $3 * 4 * 2 = 24$

10a. $4 * 3 * 6 = 72$ b. $4 * 3 * 4 = 48$ c. $4 * 1 * 5 = 20$

11a. $2 * 4 = 8$ b. $2 * 4 = 8$ c. $2 * 4 * 2 * 1 * 2 * 3 * 2$ (links/rechtsom) = 192

12a. $3 * 2 = 6$ b. $2 * 4 = 8$ c. $2 * 4 + 3 * 2 = 14$ (hoor je OF, doe dan +)

13a. $2 * 4 * 5 = 20$ b. $2 * 4 * 5 + 2 * 2 * 3 = 72$

c. $2 * 2 * 5$ (ACA) + $1 * 4 * 5$ (CAA) = 40

d. $1 * 2 * 2$ (geel) + $2 * 2 * 2$ (rood) + $1 * 2 * 2$ (blauw) + $1 * 2 * 2$ (groen) = 20

e. $1 * 2 * 2$ (ggr) + $2 * 2 * 2$ (rgg) + $1 * 2 * 2$ (grg) = 16

14a. $8 * 11 * 5 = 440$ b. $8 * 11 + 8 * 5 = 128$

15. $3 * 2 * 4 + 1 * 4 = 28$

16a. $3 * 4 * 6 * 2 = 144$

schoenen	benen	bovenlichaam	jasje
5	4 rokken 3 broeken	6 blouses 4 coltrui 6*4 combi's	3

b.(rok) $5 * 4 * 6 * 3 + 5 * 4 * 4 * 3 + 5 * 4 * 24 * 3 = 2040$

(broek) $5 * 3 * 6 * 3 + 5 * 3 * 4 * 3 + 5 * 3 * 24 * 3 = 1530$

Totaal $2040 + 1530 = 3570$ mogelijkheden

(domme som, met uiteraard een vrouw in de hoofdrol)

c. $5 * 4 * 4 * 3 + 5 * 4 * 24 * 3 = 1680$ mogelijkheden

17a. $8 * 5 * 7 * 3 * 11 = 9240$ b. $7 * 4 * 6 * 2 * 10 = 3360$

c. $3 * 11 * 8 * 5$ (par 1+2) + $3 * 11 * 8 * 7$ (par 1+3) + $3 * 11 * 5 * 7$ (par 2+3) = 4323

18a. $4 * 2 * 5 = 40$ b. $3 * 2 * 2 = 12$ d. $3 * 2 * 2 = 12$

c. $4 * 2 * 5 + 3 * 2 * 4 + 3 * 2 * 2 = 76$ mogelijkheden

e. $3 * 2 * 2$ (vff) + $3 * 2 * 2$ (fvf) + $3 * 2 * 4$ (ffv) = 48 mogelijkheden

19a. $14 * 17 = 238$ tweetallen b. $19 * 7 = 133$ tweetallen

c. $14 * 5 = 70$ tweetallen d. $5 * 26 = 130$ tweetallen

e. $7 * 24$ (eerste II = 17) + $5 * 19$ (eerste II = 16) = 263

20a. de eerste II is een meisje van 15, en de tweede II is een jongen van 16

b. het moeten een jongen en een meisje zijn, en de leeftijden moeten 15 en 17 zijn

Paragraaf 2, Een getal van 5 cijfers, hoeveel mogelijkheden zijn er?

met herhaling (10^5)

(bv 12123 en 22222 en 24356)

zonder herhaling $10 * 9 * 8 * 7 * 6$

(bv 12345 en 25480)

21a. zonder herhaling : $4 * 3 * 2 * 1 = 12$ codes

b. met herhaling : $4 * 4 * 4 * 4 = 4^4 = 256$ codes

22a. $10 * 10 * 26 * 26 * 26 * 10 = 17.576.000$

b. $10 * 10 * 2 * 20 * 20 * 10 = 800.000$ (6 klinkers)

22c. (kenteken met D) $10 * 9 * 1 * 19 * 18 * 8 = 246240$

(kenteken met F) $10 * 9 * 1 * 19 * 18 * 8 = \underline{246240}$

Totaal = 492480 mogelijkheden

23a. $4^{10} = 1048576$ mogelijkheden (en dus niet 10^4 !!!!)

b. 5 keer gokken $4^5 = 1024$ mogelijkheden

24a. wit of zwart, 2 mogelijkheden per vakje. $2^{25} = 33554432$

b. $33554432 : 100 * 0,1 = 33554,4$ mm = 33,5544 meter. Dom plan dus.

c. Er blijven 16 vakjes met keuze wit/zwart over. $2^{16} = 65536$

25a. $15 * 26 * 25 = 9750$ **b.** $15 * 12 * 11 = 1980$

c. $15 * 14 * 12$ (mmj) + $15 * 12 * 14$ (mjm) + $12 * 15 * 11$ (jmj) + $12 * 11 * 15$ (jmm) = 9000

26a. $4 * 3 * 2 * 1 * 3 * 2 * 1 = 144$

b. $4 * 3 * 3 * 2 * 2 * 1 * 1 = 144$

c. $1 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 720$

d. $5 * 4 * 3 * 2 * 1 * 2 * 1 = 240$

e. $3 * 2 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 + 2 * 1 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 960$ volgordes

27a. zes letters, 3 lettercode, zonder herhalen : $6 * 5 * 4 = 120$ codes

zes letters, 3 lettercode, met herhalen : $6 * 6 * 6 = 6^3 = 216$ codes

b. $6 * 5 * 5 * 5 = 750$ **c.** $6^3 + 6 * 5 * 4 * 3 = 576$ codes

28a. $6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 720$

b. $6 * 5 = 30$

c. $4 * 5 = 20$

29a. vijf plaatsen, 3 figuren, met herhalen : $3^5 = 243$

b. $1 * 3 * 3 * 3 * 3 = 3^4 = 81$

c. $3 * 2 * 2 * 2 * 2 = 48$

d. 5

30a. 3 plaatsen, 7 kleuren, geen gelijke naast elkaar $7 * 6 * 6 = 252$

b. $7 * 6 * 5 = 210$

c. $7 * 6 = 42$

d. $7 * 6 * 5 * 4 * 3 = 2520$ (of 7 nPr 5)

31a. 4 plaatsen, 6 cijfers, geen herhaling $6 * 5 * 4 * 3 = 360$

b. > 6000 , dus de 3, 4 en 5 mogen niet het eerste cijfer zijn. $3 * 5 * 4 * 3 = 180$

c. $6^4 = 1296$

d. met herhalen, eerste plaats = 6, tweede plaats = 3 of 4. $1 * 2 * 6 * 6 = 72$

e. < 6500 , eerste plaats = 3, 4 of 5, tweede plaats alles $3 * 6 * 6 * 6 = 648$

OF eerste plaats = 6, tweede plaats = 3 of 4 $\underline{1 * 2 * 6 * 6 = 72}$

Totaal $\underline{\quad\quad\quad} 720$

Paragraaf 3,

Permutaties $7 * 6 * 5 * 4 * 3 = \text{GR } 7 \rightarrow \text{Math} \rightarrow \text{PRB} \rightarrow 2:n\text{Pr} \rightarrow 5 = 2520$

Daarbij is de 7 het hoogste getal, en de 5 staat voor het aantal getallen.

Combinaties $\binom{7}{5} = \frac{7 * 6 * 5 * 4 * 3}{5 * 4 * 3 * 2 * 1} = \text{GR } 7 \rightarrow \text{Math} \rightarrow \text{PRB} \rightarrow 3:n\text{Cr} \rightarrow 5 = 21$

Een combinatie gebruik je

als je een groepje van 5 gelijken uit een groepje van 7 kiest.

Faculteit $7! = 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = \text{GR } 7 \rightarrow \text{Math} \rightarrow \text{PRB} \rightarrow 4: ! = 5040$

32a. $8 * 7 * 6 = 336$ **b.** $8 * 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 8! = 40320$

33. $8 * 7 * 6 * 5 * 4 = \text{GR } 8 \rightarrow \text{Math} \rightarrow \text{PRB} \rightarrow 2:n\text{Pr} \rightarrow 5 = 6720$

34 $14 * 13 * 12 * 11 * 10 * 9 * 8 * 7 * 6 * 5 = 14 \text{ nPr } 10 = 363248800$

35a. $2 \text{ sec.} * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 1440 \text{ sec.} = 24 \text{ minuten}$

b. $2 \text{ sec.} * 8 * 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 80640 \text{ sec.} : 3600 = 22,4 \text{ uur}$

$2,5 \text{ sec.} * 8 * 7 * 6 * 5 * 4 * 3 * 2 * 1 = 100800 \text{ sec.} : 3600 = 28 \text{ uur}$

Het kan dus best wel kloppen, als ze gemiddeld 2,5 seconde over het luiden van een klok deden.

36a. $9! = 362880$ **b.** $9 * 8 = 72$ **c.** $9\text{nPr}6 = 60480$

37a. zonder herhalen $4! = 24$ **b.** $1 * 3 * 2 * 1 = 6 \text{ codes}$

38a. Hoeveel zes lettercodes met deze 6 letters zijn er, zonder herhalen

b. Hoeveel drie lettercodes met deze 6 letters zijn er, zonder herhalen

c. Hoeveel vier lettercodes met deze 6 letters zijn er, met herhalen

d. Hoeveel drie lettercodes met deze 6 letters zijn er, zonder herhalen

39a. Permutatie : alle leerlingen zijn verschillend

b. Permutatie : alle prijzen zijn verschillend

c. Combinatie : de kaartjes zijn gelijk (waardig)

d. Permutatie : alle taken zijn verschillend

e. Permutatie : alle plaatsen zijn verschillend

40 gelijke taken, dus combinatie $\binom{18}{4} = \text{GR } 18 \rightarrow \text{Math} \rightarrow \text{PRB} \rightarrow 3:n\text{Cr} \rightarrow 4 = 3060$

41a. $25\text{nPr}3 = 2300$ (elke cd is anders) **b.** $38\text{nPr}5 = 60233040$

42a. $14! = 87.178.291.200$ **b.** (boeken zijn gelijkwaardig) $\binom{14}{3} = 364$

c. $6 * 5 * 3 = 90$ **d.** (Engelse boeken zijn gelijkwaardig) $\binom{6}{3} = 20$

43a. $18\text{nPr}3 = 4896$ permutatie, verschillende taken

43b. $\binom{18}{3} = 816$ kies een groepje van 3 gelijken uit 18

44a. $\binom{60}{5} = 5461512$ b. $\binom{40}{4} = 91390$

c. $5461512 * 91390 = 499.127.581.700$ manieren

45 Het gaat om 6 jongens en 9 meisjes. Steeds combinaties, groepjes van 6 kiezen

a. $\binom{6}{3} * \binom{9}{3} = 1680$ b. $\binom{6}{6} * \binom{9}{0} = 1$

c. hoogstens 1 meisje = 1 of 0 meisjes. $\binom{6}{6} * \binom{9}{0} + \binom{6}{5} * \binom{9}{1} = 54$

d. meer dan 4 jongens = 5 of 6 jongens, zelfde antwoord als c.

46a. $50 * 49 * 48 * \binom{47}{3} = 1.906.884.000$ b. $\binom{50}{6} = 15.890.700$

47a. $\binom{36}{8} = 30.260.340$ b. $\binom{36}{4} * \binom{33}{4} = 2.410.392.600$

c. $\binom{20}{2} * \binom{13}{6} = 326.040$ d. $\binom{36}{3} * \binom{33}{5} = 1.694.579.040$

e. 7 OF 8 jongsten $\binom{20}{7} * \binom{49}{1} + \binom{20}{8} * \binom{49}{0} = 3.798.481$

48a. boeken gelijkwaardig $\binom{6}{3} = 20$ b. $6nPr3 = 120$

c. hoeveel rijtjes antwoorden zijn mogelijk : $6^3 = 216$

Maar de vraag hier is Hoeveel antwoorden zijn er mogelijk : $3 * 6 = 18$

49a. combinatie, de taken zijn gelijk, de II zijn gelijkwaardig. $\binom{22}{4} = 7315$

b. $\binom{6}{2} * \binom{3}{2} = 45$ c. $\binom{6}{2} * \binom{3}{1} * \binom{19}{1} = 855$

d. minstens 3 = 3 OF 4 17 jarigen $\binom{5}{3} * \binom{23}{1} + \binom{5}{4} * \binom{23}{0} = 235$

e. Dan zijn er geen 18 jarigen. $\binom{6}{4} + \binom{15}{4} + \binom{5}{4} = 1385$

50a. grootte * bodem * vlees * groente = $3 * 4 * \binom{4}{2} * \binom{7}{2} = 1512$

b. grootte * bodem * vlees = $1 * 4 * \binom{4}{2} + 1 * 4 * \binom{4}{3} + 1 * 4 * \binom{4}{4} = 44$

c. grootte * bodem * groente = $3 * 4 * (\binom{7}{4} + \binom{7}{5} + \binom{7}{6} + \binom{7}{7}) = 768$

51a. $\binom{60}{4} = 847635$ b. $\binom{54}{4} = 316251$

c. $\binom{6}{4} * \binom{54}{0} + \binom{6}{3} * \binom{54}{1} + \binom{6}{2} * \binom{54}{2} = 22560$

4 defect + 3 defect + 2 defect = 15 + 1080 + 21465

Paragraaf 4, routes in een rooster.

52a. $\binom{7}{2} = 21$ manieren b. totaal = $2^7 = 128$ manieren

53a. $\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = 45$ b. $\binom{10}{5} = 252$ c. $2^{10} = 1024$ d. $2^8 = 256$

54a. $2^{20} = 1048576 =$ totaal b. $\binom{20}{15} = \binom{20}{5} = 15504$

c. 80 % = 16 vragen goed $\binom{20}{16} = \binom{20}{4} = 4845$ manieren zijn goed

$\frac{4845}{1048576} * 100 = 0,46\%$ van het totaal aantal manieren (met gokken kom je er niet)

55a. Kies een groepje van 6 uit de 12, de anderen zitten dan in groep B $\binom{12}{6} = 924$

b. Kies een groepje van 4 uit de 12, de anderen zitten dan in groep B $\binom{12}{4} = 495$

- c. Totaal aantal manieren = $2^{12} = 4096$ manieren om twee groepen te maken
 groep A van 0 personen kan maar op 1 manier
 groep A van 1 persoon kan op 12 manieren
 groep B van 0 personen kan maar op 1 manier
 groep B van 1 persoon kan op 12 manieren

alle mogelijkheden – A van 0 pers. – A van 1 pers. – B van 0 pers. – B van 1 pers.

= $4096 - 1 - 12 - 1 - 12 = 4070$ manieren voor deze verdeling.

56a. lampjes zijn aan of uit, dus steeds 2 opties $2^{19} = 524288$ mogelijkheden

b. $\binom{19}{5} = 11628$ c. **0, 1 Of 2,** $\binom{19}{0} + \binom{19}{1} + \binom{19}{2} = 191$

d. 3 lampjes aan, dus bij 16 keuze aan/uit $2^{16} = 65536$

57a. wit/zwart, zes plaatsen $2^6 = 64$

b. $2^4 = 16$

c. Bij alle symmetrische rijtjes, dus zzzzzz, wwwwww, zwwwwz, wzzzzw, zzwwzz, wwzzww. Dat zijn 6 rijtjes

58a. kies: 6 ogen = A, geen 6 ogen = B

b. kies: som 20 = A, som geen 20 = B

c. kan niet

d. kies : even = A, oneven = B

59a. NONONONO, NNNNOOOO

b. ja; maar NNOONNONO niet, een N te veel

c. Het gaat om 4 keer een N en 4 keer een O in een rijtje van 8 letters.

d. $n = 8 =$ totaal, en $r = 4 =$ aantal keer O of aantal keer N $\binom{8}{4} = 28$ route van A \rightarrow B

60a. $\binom{14}{6} = \binom{14}{8} = 3003$

b. $\binom{4}{2} * \binom{10}{4} = 1260$

c en d. $\binom{4}{2} * \binom{6}{2} * \binom{4}{2} = 540$

61a. $\binom{4}{2} * \binom{4}{2} = 36$

b. $\binom{4}{2} * \binom{6}{2} * \binom{2}{1} = 180$

a. $\binom{8}{2} * \binom{3}{2} = 84$

d. $\binom{6}{3} = 20$

e. van A naar C, kortste routes $\binom{8}{2} * 1 = 28$

62a. $\binom{4}{2} * \binom{8}{2} * \binom{4}{2} = 1008$

b. $\binom{2}{1} * \binom{4}{2} * \binom{2}{1} * \binom{5}{2} * 2 = 480$

63a. 2-4 4-5

3-5

b. $\binom{6}{2} = 15$

c. $\binom{8}{3} = 56$

d. $\binom{4}{1} * \binom{4}{1}$

= 16

64a. Er is maar 1 kortste route naar P, Q en R

5	9	23	52
4	4	14	29
3	6	10	15
2	3	4	5

b. $3 + 3 = 6$

c. $4 + 6 = 10$

d. $4 + 10 = 14$

e. Steeds getallen die schuin tegenover elkaar staan optellen, 52 kortste routes

65.

6	11	16	21	32	62	132	272
5	5	5	5	11	30	70	140
4				6	19	40	70
3				6	13	21	30
2	3	4	5	6	7	8	9

66. 537 routes

67a.

6	18	51	106	161	229	331	497
5	17	33	55	55	68	102	166
4	10	16	22		13	34	64
3	6	6	6	6	13	21	30
2	3	4	5	6	7	8	9

b. kortste routes, 66

68a. $n = 4$, $r = 1$, dus $n =$ rij nummer, en $r =$ de plaats in de rij.

b. $\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64 = 2^6$

d. idem, maar dan met 7, som = $2^7 = 128$

Getal en ruimte boek 2, hoofdstuk 6. Kansrekenen.

Paragraaf 1, kansen berekenen, $\text{Kans} = \frac{\text{gunstigemogelijkheden}}{\text{totaalvanallemogelijkheden}}$

1. De kans op totaal 7 = $\frac{6}{36}$ is groter dan de kans op totaal 9 = $\frac{4}{36}$ (zie rooster)

2a. $P(\text{som is minder dan } 5) = \frac{6}{36} = 0.167$

6		8		10		
5			8		10	
4	5			8		10
3		5			8	
2			5			8
1				5		
+	1	2	3	4	5	6